（18）（本题满分 10 分）

证明：$x\ln\dfrac{1+x}{1-x}+\cos x>1+\dfrac{x^2}{2},0<x<1$

【解析】：令 $f\left(x\right)=x\ln\dfrac{1+x}{1-x}+\cos x-1-\dfrac{x^2}{2}$，可得

$$
\begin{aligned}
f'\left(x\right)&=\ln\frac{1+x}{1-x}+x\frac{1+x}{1-x}\bullet\frac{2}{\left(1-x\right)^2}-\sin x-x\\
&=\ln\frac{1+x}{1-x}+\frac{2x}{1-x^2}-\sin x-x\\
&=\ln\frac{1+x}{1-x}+\frac{1+x^2}{1-x^2}\bullet x-\sin x
\end{aligned}
$$

由 $0<x<1$，得 $\ln\dfrac{1+x}{1-x}\ge 0$，$\dfrac{1+x^2}{1-x^2}>1$，

所以 $\dfrac{1+x^2}{1-x^2}\bullet x-\sin x\ge 0$，

故 $f'\left(x\right)\ge 0$，即得 $x\ln\dfrac{1+x}{1-x}+\cos x-1-\dfrac{x^2}{2}\ge 0$

所以 $x\ln\dfrac{1+x}{1-x}+\cos x\ge\dfrac{x^2}{2}+1$。

（19）（本题满分 10 分）

设 $f(x)$ 在 $\left[0,3\right]$ 上连续，在 $\left(0,3\right)$ 内二阶可导，且 $2f(0)=\int_0^2 f(x)dx=f(2)+f(3)$

1）证明：$\exists\eta\in\left(0,2\right)$ 使得 $f(0)=f\left(\eta\right)$

2）证明：$\exists\xi\in\left(0,3\right)$ 使得 $f''\left(\xi\right)=0$。

【解析】：

1）由于 $f(x)$ 在 $\left[0,3\right]$ 上连续，可知 $F(x)=\int_0^x f(t)dt$ 在 $\left[0,3\right]$ 上连续，在 $\left(0,3\right)$ 内可导。则由拉格朗日中值定理可得 $\exists\eta\in\left(0,2\right)$ 使得 $2F'\left(\eta\right)=F(2)-F(0)$，也即 $2f\left(\eta\right)=\int_0^2 f(x)$，代入原等式即得 $f(0)=f\left(\eta\right)$。

2）设 m,M 分别为 $f(x)$ 在 $\left[2,3\right]$ 上的最大值和最小值，易知 $m\le\dfrac{f(2)+f(3)}{2}\le M$，则由闭区间上连续函数的介质定理可知 $\exists\eta_1\in\left[2,3\right]$ 使得 $\dfrac{f(2)+f(3)}{2}=f\left(\eta_1\right)$，代入

$2f(0)=\int_0^2 f(x)dx=f(2)+f(3)$ 可得 $f(0)=f(\eta)=f(\eta_1)$。在区间 $[0,\eta]$ 上运用罗尔定理可得 $\exists\xi_1\in(0,\eta)$ 使得 $f'(\xi_1)=0$；再在区间 $[\eta,\eta_1]$ 上运用罗尔定理可知，$\exists\xi_2\in(\eta,\eta_1)$ 使得 $f'(\xi_2)=0$。再在区间 $[\xi_1,\xi_2]$ 上对 $f'(x)$ 运用罗尔定理可知，$\exists\xi\in(\xi_1,\xi_2)\subset(0,3)$ 使得 $f''(\xi)=0$。